Πως αποδεικνύω ότι μία εξίσωση έχει:

το πολύ κ ρίζες

Υποθέτω ότι έχει κ+1 ρίζες και εφαρμόζοντας διαδοχικά θεωρήματα Rolle προκύπτει άτοπο
ή
Αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $A_1, A_2, ..., A_\kappa$

το πολύ 1 ρίζα

Υποθέτω ότι έχει 2 ρίζες και εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle προκύπτει άτοπο
ή
Αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β)

Εφαρμόζω τα θεωρήματα συνέχειας για την f δηλαδή Bolzano ή Σύνολο τιμών
ή
Εφαρμόζω θεώρημα Rolle στην αρχική της f
ή
Εφαρμόζω θεώρημα Fermat στην αρχική της f αν έχω ακρότατο

τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β) όταν είναι της μορφής $f(x)=\alpha$

Ελέγχω αν το α ανήκει στο σύνολο τιμών της f
ή
Εφαρμόζω ΘΕΤ για την f
ή
Εφαρμόζω ΘΜΤ στην αρχική της f

ακριβώς μία ρίζα στο (α,β)

Αποδεικνύω ότι έχει τουλάχιστον μία και το πολύ μία

ακριβώς μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της

Αν είναι γνησίως μονότονη βρίσκω σύνολο τιμών και παρατηρώ ότι το μηδέν ανήκει σε αυτό
ή
Βρίσκω προφανή ρίζα και αν είναι γνησίως μονότονη τότε είναι μοναδική
ή
Αποδεικνύω ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β) και στην συνέχεια δείχνω ότι είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της ή με άτοπο Rolle υποθέτω ότι έχει κι άλλη ρίζα στο πεδίου ορισμού και καταλήγω σε άτοπο.

Ακριβώς κ ρίζες

Δείχνω ότι είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $A_1, A_2, ..., A_\kappa$ και βρίσκω το σύνολο τιμών σε καθένα από αυτά. Στη συνέχεια δείχνω ότι το μηδέν περιέχεται σε καθένα από αυτά.

Ασκησόπολις

Πως βρίσκω το πλήθος ριζών μία εξίσωσης

Μορφής $f(x)=\alpha$ όπου α πραγματικός σταθερός αριθμός

Βρίσκω μονοτονία της f και το σύνολο τιμών σε καθένα από τα διαστήματα που είναι γνησίως μονότονη. Ελέγχω σε πόσα σύνολα τιμών περιέχεται το α.

Μορφής $f(x)=\lambda$ όπου λ παράμετρος

Εργάζομαι όπως στην άλλη μορφή απλά διακρίνω περιπτώσεις για την παράμετρο και σε κάθε περίπτωση ελέγχω σε πόσα σύνολο τιμών περιέχεται.

Πως λύνω μία εξίσωση

Αν είναι της μορφής $f(x)=g(x)$ και η f έχει ελάχιστο το α ενώ η g μέγιστο το α και η ισότητα ισχύει στο ίδιο x τότε και για τις δύο τότε είναι μοναδική ρίζα.

Αν είναι της μορφής $f(x)=\lambda x+\beta$ και η ευθεία είναι εφαπτομένη τότε με χρήση κυρτότητας βρίσκω που ισχύει η ισότητα.

Αλγεβρικά με ύλη Α΄ και Β΄ Λυκείου

Τα φέρνω όλα στο 1ο μέλος θεωρώ συνάρτηση και βρίσκω προφανή ρίζα. Στη συνέχεια αποδεικνύω ότι είναι γνησίως μονότονη άρα έχει μοναδική ρίζα ή δείχνω ότι έχει ακρότατο σε αυτό άρα η ισότητα ισχύει μόνον για αυτό.

Πως αποδεικνύω ότι μία εξίσωση είναι αδύνατη

Αλγεβρικά με ύλη Α΄ και Β΄ Λυκείου

Τα φέρνω όλα στο 1ο μέλος και θεωρώ συνάρτηση. Βρίσκω σύνολο τιμών και δείχνω ότι το μηδέν δεν ανήκει σε αυτό.

Μέσω προσήμων των παραστάσεων που περιέχονται

Υποθέτω ότι έχει ρίζα και καταλήγω σε άτοπο

Πως βρίσκω πρόσημο συνάρτησης

Προφανής ρίζα και μονοτονία

Βρίσκω τις ρίζες και μεταξύ των ριζών λόγω συνέχειας διατηρεί πρόσημο. Με χρήση τιμών βρίσκω πρόσημο.

Σύνολο τιμών

Ακρότατο, δηλαδή αν έχει ολικό ελάχιστο μη αρνητικό αριθμό τότε είναι θετική ενώ αν έχει ολικό μέγιστο μη θετικό αριθμό τότε είναι αρνητική

Askisopolis

Πως αποδεικνύω ανίσωση της μορφής:

$f(x) >$ ή $< g(x)$

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και αναζητώ το πρόσημο της με τις μεθόδους εύρεσης προσήμου συνάρτησης

$f(x) \geq$ ή $\leq g(x)$

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
Αν η h έχει ακρότατο το μηδέν τότε $h(x) \geq 0$ ή $h(x) \leq 0$

Αν η f έχει ελάχιστο το α και η g μέγιστο το α τότε $f(x) \geq \alpha \geq g(x)$
(Αντίστοιχα $f(x) \leq \alpha \leq g(x)$)
(Αν η ισότητα δεν ισχύει στο ίδιο x τότε γίνεται γνήσια η ανίσωση)

$f(x) < g(x) < h(x)$
ή $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Αποδεικνύω ξεχωριστά την κάθε ανίσωση αριστερά – δεξιά με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους

Εφαρμόζω ΘΜΤ σε κατάλληλο διάστημα.
<u>Σημαντική ένδειξη:</u> Αν περιέχεται στην ανίσωση κάποια παράγωγος και γνωρίζουμε μονοτονία f' (αντίστοιχα κυρτότητα f) ή αν γνωρίζουμε σχέση ανίσωσης για την f'

$f(\alpha) \leq$ ή $\geq f(\beta)$ **που περιέχει δύο μεταβλητές α,β με $\alpha \leq \beta$**

Φέρνω στο ένα μέλος τα α και στο άλλο τα β. Θεωρώ συνάρτηση f και έχω $f(\alpha)$ στο ένα μέλος και $f(\beta)$ στο άλλο μέλος. Με χρήση μονοτονίας αποδεικνύω την ανίσωση.

Εφαρμόζω ΘΜΤ στο $[\alpha, \beta]$ ή σε περισσότερα διαστήματα πχ $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$.
(Το x_0 είτε το έχουμε από προηγούμενο ερώτημα είτε είναι κάποια τιμή που γνωρίζουμε στην εκφώνηση είτε το μέσο του διαστήματος)
<u>Σημαντικές ενδείξεις:</u> Αν γνωρίζουμε μονοτονία f' (αντίστοιχα κυρτότητα f) και αν γνωρίζουμε σχέση ανίσωσης για την f'.

$f(x) \geq \lambda x + \beta$ ή $f(x) \leq \lambda x + \beta$

Ανίσωση κυρτότητας εφαπτομένης

Ασκησόπολις